NO DATE 03/04/17

Θεώρημα

Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και $\alpha<c<\beta$
Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[\alpha,c]$ και $[c,\beta]$
Στην περίπτωση αυτή

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Απόδ

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[\alpha,c],[c,\beta]$
Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει P_1 διαμέριση του $[\alpha,c]$ ώστε:

$$U(f_{|[\alpha,c]},P_1)-L(f_{|[\alpha,c]},P_1)<\frac{\varepsilon}{2}\ (1)$$

και υπάρχει P_2 διαμέριση του $[c,\beta]$ ώστε $U(f_{|[c,\beta]},P_2)-L(f_{|[c,\beta]},P_2)<\frac{\varepsilon}{2}$ (2)
Η $P=P_1\cup P_2$ είναι διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ και εύκολα προκύπτει ότι:

$$L(f,P)=L(f_{|[\alpha,c]},P_1)+L(f_{|[c,\beta]},P_2)\ (3)$$
$$U(f,P)=U(f_{|[\alpha,c]},P_1)+U(f_{|[c,\beta]},P_2)\ (4)$$

Από (1),(2),(3),(4) προκύπτει ότι:
$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

Επίσης ▸ $L(f|[a,c], P_1) \leq \int_a^c f(x)\,dx \leq U(f|[a,c], P_1)$

▸ $L(f|[c,b], P_1) \leq \int_c^b f(x)\,dx \leq U(f|[c,b], P_2)$

και προσθέτοντας κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψην τις (3), (4):

$$L(f,P) \leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \leq U(f,P)$$

Προκύπτει ότι $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

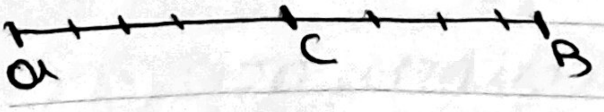
Έστω $\varepsilon > 0$.

Τότε $\exists\, P$ διαμέριση του $[a,b]$ ώστε:

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Θέτουμε $P' = P \cup \{c\}$

Τότε $U(f,P') - L(f,P') \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. (5)



Θέτουμε $P_1 = P' \cap [\alpha, c]$, $P_2 = P' \cap [c, \beta]$

Τότε $L(f, P') = L(f|_{[\alpha,c]}, P_1) + L(f|_{[c,\beta]}, P_2)$

και $U(f, P') = U(f|_{[\alpha,c]}, P_1) + U(f|_{[c,\beta]}, P_2)$

και άρα (5) $\Rightarrow$

$$\left(U(f|_{[\alpha,c]}, P_1) - L(f|_{[\alpha,c]}, P_1)\right) + \left(U(f|_{[c,\beta]}, P_2) - L(f|_{[c,\beta]}, P_2)\right) < \varepsilon$$

άρα $U(f|_{[\alpha,c]}, P_1) - L(f|_{[\alpha,c]}, P_1) < \varepsilon$

και $U(f|_{[c,\beta]}, P_2) - L(f|_{[c,\beta]}, P_2) < \varepsilon$.

Από το κριτήριο Riemann και η f ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, c]$ και $[c, \beta]$

• Ορίζουμε $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0$

Αν $\alpha > \beta$ και $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, ορίζουμε: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$

Θεώρημα: (Μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού)
Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$
Τότε $\exists\, t \in [\alpha, \beta]$ ώστε:

$$\int_\alpha^\beta f(x) g(x)\,dx = f(t) \int_\alpha^\beta g(x)\,dx \quad (*)$$

Απόδειξη

Καταρχήν f ολοκληρώσιμη (ως συνεχής)
άρα $f \cdot g$ ολοκληρώσιμη (ως γινόμενο 2 ολοκληρώσιμων)
Εφόσον f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, Δηλαδή $\exists\, x_0, y_0 \in [\alpha,\beta]$ ώστε: $f(x_0) \le f(x) \le f(y_0)$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$
και αν $M = f(y_0)$ και $m = f(x_0)$
από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Μ.Τ.), το σύνολο τιμών της f θα είναι το $[m,M]$
Εφόσον $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$ και $g(x) \ge 0$
προκύπτει: $m g(x) \le f(x) g(x) \le M \cdot g(x)$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$

άρα: $$m \cdot \int_\alpha^\beta g(x)dx \le \int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx \le M \cdot \int_\alpha^\beta g(x)dx \quad (1)$$

Εφόσον $g(x) \ge 0$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$, προκύπτει ότι:
$\int_\alpha^\beta g(x)dx \ge 0$

1η περίπτωση: $\int_\alpha^\beta g(x)dx = 0$

Τότε από την (1) $\int_\alpha^\beta g(x) f(x) dx = 0$
και άρα η (*) θα ισχύει για οποιοδήποτε $\xi \in [\alpha,\beta]$.

NO DATE

2η περίπτωση: $\int_a^b g(x)dx > 0$

Τότε από την (1): $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$.

εφόσον, όπως αναφέραμε το σύνολο τιμών της f είναι το $[m, M]$, $\exists\, \xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Πόρισμα: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε $\exists\, \xi \in [a, b]$ ώστε $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

Αποδ.

Από το προηγούμενο θεώρημα για $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 1$

Παρατήρηση: Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τότε η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και εφόσον $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ $\forall x \in [a, b]$ προκύπτει:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Ορισμός: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, x]$ για κάθε $x \in [a, b]$)
Η συνάρτηση $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ με:

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$, λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα

NO DATE

Θεώρημα:

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.
Το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι συνεχής συνάρτηση (και μάλιστα ομοιόμορφα συνεχής)

Απόδ

Η f είναι φραγμένη (εφόσον είναι ολοκληρώσιμη) άρα $\exists\, M>0$ ώστε $|f(t)|\leq M,\ \forall\, t\in[\alpha,\beta]$
Έστω τυχαία $x,y\in[\alpha,\beta]$ με $x<y$.

$$|F(x)-F(y)| = |F(y)-F(x)| = \left|\int_\alpha^y f(t)\,dt - \int_\alpha^x f(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\cancel{\int_\alpha^x f(t)\,dt} + \int_x^y f(t)\,dt - \cancel{\int_\alpha^x f(t)\,dt}\right|$$

$$\leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq \int_x^y M\,dt$$

$$= M(y-x)$$

$$= M|x-y|$$

Συνεπώς η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (σταθερά M) άρα είναι (ομοιόμορφα συνεχής) και συνεχής.

NO DATE

Σημείωση: Αν $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$, όταν λέμε ότι η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ εννοούμε ότι υπάρχει η $\phi'(x)$, $\forall x\in(a,b)$ και επιπλέον ότι είναι πραγματικοί αριθμοί τα όρια:

$$\phi'_-(b)=\lim_{t\to b^-}\frac{\phi(t)-\phi(b)}{t-b}\ ,\quad \phi'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{\phi(t)-\phi(a)}{t-a}$$

και θα συμβολίζουμε:

$$\phi'(a)=\phi'_+(a) \quad \text{και} \quad \phi'(b)=\phi'_-(b)$$

Θεώρημα: (Θεμελιώδες θεώρ. του απειρ. λογισμού)
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
Αν η f είναι συνεχής στο $x_0\in[a,b]$ τότε η F (το αόριστο ολοκλήρωμα της f) είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0)=f(x_0)$.

Απόδ.

Υποθέτουμε ότι $a<x_0<b$,
(η απόδειξη στις περιπτώσεις $x_0=a$ ή $x_0=b$ γίνεται με όμοιο τρόπο)

Θέτουμε $\delta_1=\min\{x_0-a,\ b-x_0\}$

Για κάθε h με $|h|<\delta_1$:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h}f(t)dt-\int_a^{x_0}f(t)dt\right)-f(x_0)$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt-\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(x_0)dt=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))\,dt.$$

NO DATE

Έστω $\varepsilon>0$, εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta>0$ με $0<\delta<\delta_1$ ώστε αν $|t-x_0|<\delta$ τότε $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Έστω h με $0<|h|<\delta$

α) Αν $0<h<\delta$:

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=\frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))\,dt\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt$$

$$\leq\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon\,dt=\varepsilon.$$

β) Αν $-\delta<h<0$.

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0}(f(t)-f(x_0))\,dt\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{|h|}\cdot\int_{x_0+h}^{x_0}|f(t)-f(x_0)|\,dt$$

$$\leq\frac{1}{|h|}\,\varepsilon\cdot(-h)=\varepsilon$$

(αφού $|h|=-h$)

Επομένως $\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$

δηλ. $F'(x_0)=f(x_0)$.

(1ο θεώρ. του Απ. λογισμού)

NO DATE

Πόρισμα: Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$

Πόρισμα: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε $\exists\, \xi\in(a,b)$ ώστε $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

Απόδ (2η απόδειξη)

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού για την F (με $F(x)=\int_a^x f(t)dt$)

$$\Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b) : \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi) = f(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{\int_a^b f(t)dt - 0}{b-a} = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = f(\xi)(b-a)$$

Ορισμός: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
Μια συνάρτηση $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $G'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$ λέγεται παράγουσα της f ή αντιπαράγωγος της f.
Σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα η F με $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ (δηλ. το αόρ. ολοκλ. της f) είναι μια παράγουσα της f (για f συνεχής) δηλ. $F'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$.

NO DATE

Ερώτημα: Έχει η f άλλες παράγουσες;

Απάντηση:

Έστω G μια παράγουσα της f δηλαδή: $G:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ ώστε $G'(x)=f(x),\ \forall x\in[a,\beta]$

Τότε $(G-F)'(x) = G'(x)-F'(x)$

$= f(x)-f(x)=0,\ \forall x\in[a,\beta]$

Τότε από Απ.Λογ.Ι, ως συνέπεια του ΘΜΤ, η $G-F$ είναι σταθερή, δηλαδή $\exists\, c\in\mathbb{R}$ με $G(x)-F(x)=c\ ,\forall x\in[a,\beta]$

Όμως $F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$

Έτσι $G(a)=c$, δηλ. $c=G(a)$.

Άρα $G(x)-F(x)=G(a)\ ,\forall x\in[a,\beta]$

δηλ. $F(x)=G(x)-G(a)\ ,\forall x\in[a,\beta]$

άρα $\int_a^x f(t)\,dt=G(x)-G(a)\ ,\forall x\in[a,\beta]$

Για $x=\beta$ παίρνουμε ότι

$$\int_a^\beta f(t)\,dt=G(\beta)-G(a)$$

Έτσι έχουμε αποδείξει το ζητούμενο!

$\Rightarrow$

Θεώρημα (Ειδική περίπτωση του 2ου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού)

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και F το αόριστο ολοκλήρωμα της f, δηλαδή $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$

Αν G είναι μία παράγουσα της f τότε

$$G(x)=F(x)+G(\alpha)$$
$$=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt+G(\alpha),\ \forall x\in[\alpha,\beta].$$

Ειδικότερα: $\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt=G(\beta)-G(\alpha)}$

Σημείωση:
Για $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη δεν ισχύει γενικά ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} G'(x)\,dx=G(\beta)-G(\alpha)$

Παράδειγμα

$G:[0,1]\to\mathbb{R}$: $G(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x\neq 0\end{cases}$.

Τότε η G είναι παραγωγίσιμη:

$$G'(x)=\begin{cases}0, \ x=0\\ 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)+x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)(-2)\cdot\frac{1}{x^3}\end{cases}$$
$$=2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Η G δεν είναι φραγμένη, άρα δεν έχει νόημα να μιλάμε για ολοκλήρωμα της G'.

NO DATE

Υπάρχουν (δύσκολα) παραδείγματα
$G:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε G παραγωγίσιμη
ώστε G' φραγμένη
άρα G' όχι Riemann ολοκληρώσιμη

<u>Θεώρημα</u> (2ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)

(Γενική περίπτωση)
Έστω $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και η G είναι Riemann ολοκληρώσιμη
τότε $\int_a^b G'(x)\,dx = G(b)-G(a)$

<u>Απόδ</u> (⇒ παραλείπεται)

Γιατί είναι σημαντικό το 2ο Θεμ. Θεώρημα του Απειρ. Λογισμού;
Διότι ανάγει τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων στον υπολογισμό παραγώγων.